强化学习2022
第6节

涉及知识点：
参数化值函数近似、状态值函数与状态-动作值、函数近似、策略梯度、Actor-Critic

价值和策略近似逼近方法

张伟楠 – 上海交通大学

课程大纲

强化学习基础部分	强化学习前沿部分
1. 强化学习、探索与利用	9. 基于模型的深度强化学习
2. MDP和动态规划	10. 模仿学习
3. 值函数估计	11. 离线强化学习
4. 无模型控制方法	12. 参数化动作空间
5. 规划与学习	13. 目标导向的强化学习
6. 参数化的值函数和策略	14. 多智能体强化学习
7. 深度强化学习价值方法	15. 强化学习大模型
8. 深度强化学习策略方法	16. 技术交流与回顾

课程回顾

基于模型的动态规划

- 值迭代 $V(s) = R(s) + \max_{a \in A} \gamma \sum_{s' \in S} P_{sa}(s')V(s')$
- 策略迭代 $\pi(s) = \arg\max_{a \in A} \sum_{s' \in S} P_{sa}(s')V(s')$

无模型的强化学习

- 在线策略蒙特卡洛 $V(s_t) \leftarrow V(s_t) + \alpha(G_t - V(s_t))$
- 在线策略时序差分 $V(s_t) \leftarrow V(s_t) + \alpha\big(r_{t+1} + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)\big)$
- 在线策略时序差分 SARSA学习

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t))$$

- 离线策略时序差分 Q-学习

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t))$$

参数化价值函数

张伟楠 – 上海交通大学

本课程中解决的关键问题

- 之前所有模型的做法都是基于创建一个查询表，在表中维护状态值函数$V(s)$或状态-动作值函数$Q(s,a)$

- 当处理大规模马尔可夫决策过程（MDP）时，即：
  - 状态或者状态-动作空间非常大
  - 连续的状态或动作空间

  是否仍然需要为每一个状态维护$V(s)$或为每个状态-动作对维护$Q(s,a)$?
  - 例如
    - 围棋博弈（10^{170}的状态空间）
    - 直升机，自动驾驶汽车（连续的状态空间）

主要内容

- 大规模马尔可夫决策过程的解决方法
  - 对状态/动作进行离散化或分桶
  - 构建参数化的值函数估计

目录

Contents

01

对状态/动作进行离散化

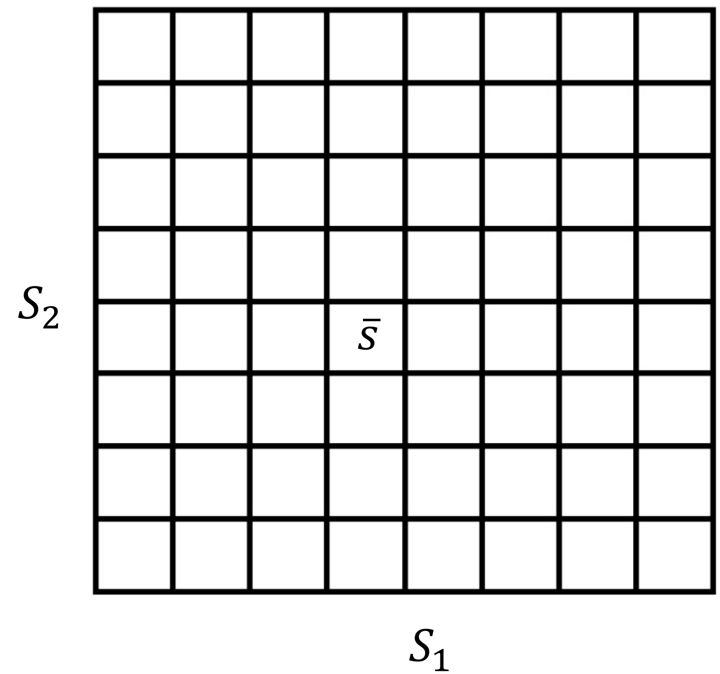
离散化连续马尔可夫决策过程

- 对于连续状态马尔可夫决策过程，我们可以对状态空间进行离散化

- 例如，如果用2维连续值 (s_1, s_2)表示状态，可以使用网格对状态空间进行切分从而转化为离散的状态值
- 记离散的状态值为$\bar{s}$
- 离散化的马尔可夫决策过程可以表示为：

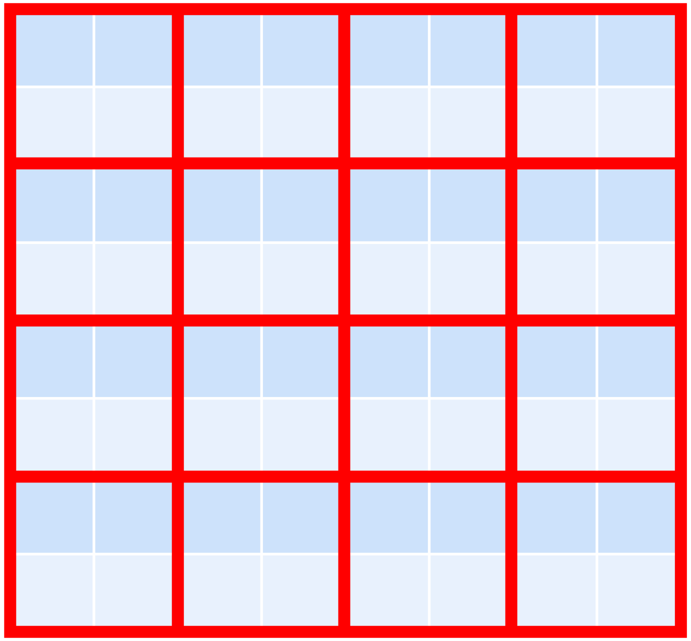
$$(\bar{S}, A, \{P_{\bar{s}a}\}, \gamma, R)$$

- 这样一来，就能够使用前述方法求解马尔可夫决策过程



对大型马尔可夫决策过程分桶

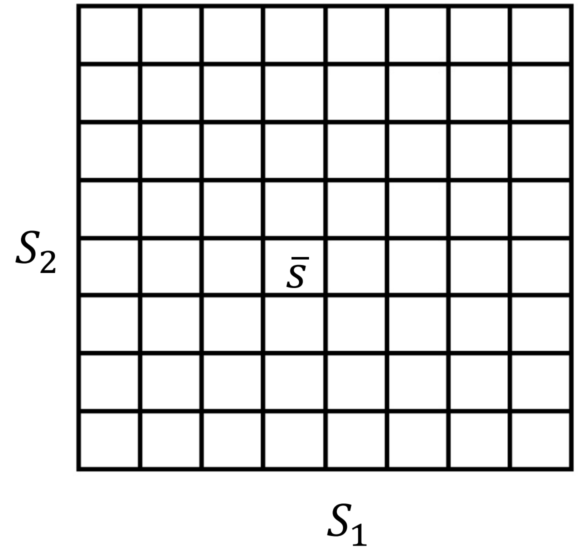
- 对于一个大型的离散状态马尔可夫决策过程，我们可以对状态值进一步分桶以进行采样聚合
  - 使用先验知识将相似的离散状态归类到一起
    - 例如，利用根据先验知识抽取出来的状态特征对状态进行聚类

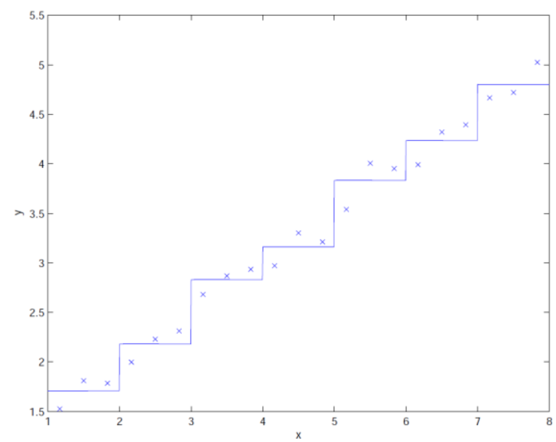


离散化/分桶

- **优点**
  - 操作简洁直观
  - 高效
  - 在处理许多问题时能够达到较好效果
- **缺点**
  - 过于简单地表示价值函数V
  - 可能为每个离散区间假设一个常数值
  - 维度灾难

$$S = R^n \Rightarrow \bar{S} = \{1, \dots, k\}^n$$





02

参数化
价值函数

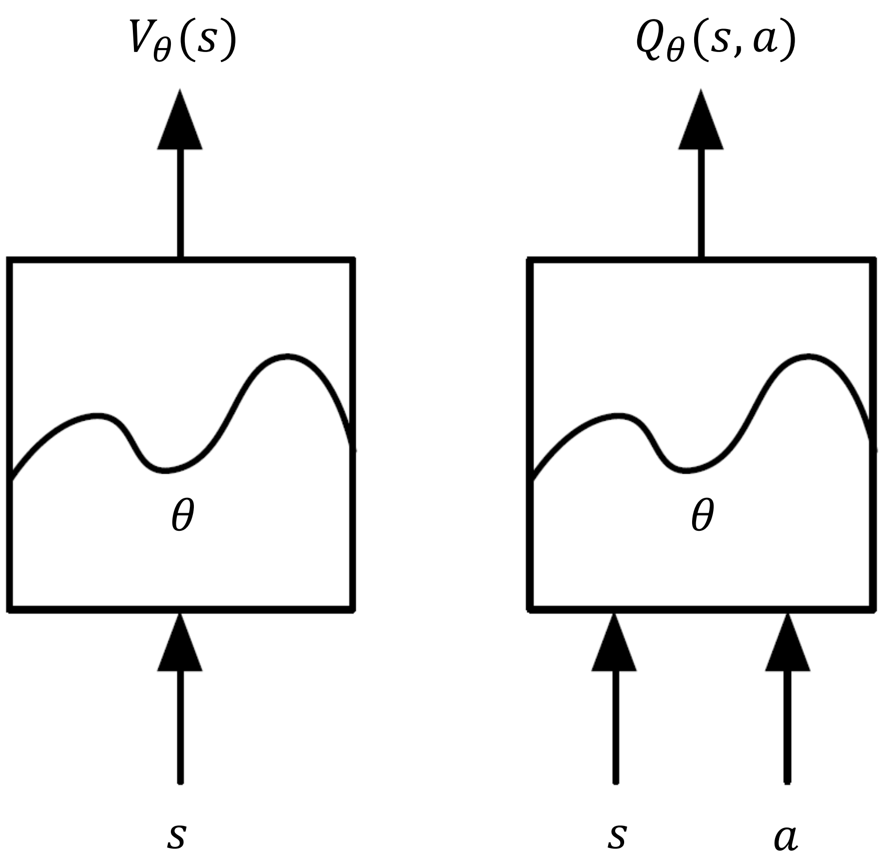
参数化值函数近似

- 构建参数化（可学习的）函数来近似值函数

$$V_\theta(s) \simeq V^\pi(s)$$
$$Q_\theta(s,a) \simeq Q^\pi(s,a)$$

  - θ是近似函数的参数，可以通过强化学习进行更新
  - 参数化的方法将现有可见的状态泛化到没有见过的状态上

值函数近似的主要形式



- 一些函数近似
  - （一般的）线性模型
  - 神经网络
  - 决策树
  - 最近邻
  - 傅立叶/小波基底
- 可微函数
  - （一般的）线性模型
  - 神经网络
- 我们希望模型适合在非稳态的，非独立同分布的数据上训练
  - 因此参数化模型比树模型更适合

基于随机梯度下降（SGD）的值函数近似

- 目标：找到参数向量θ最小化值函数近似值与真实值之间的均方误差

$$J(\theta) = \mathbb{E}_\pi[\frac{1}{2}\left(V^\pi(s) - V_\theta(s)\right)^2]$$

- 误差减小的梯度方向

$$-\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \mathbb{E}_\pi[\left(V^\pi(s) - V_\theta(s)\right)\frac{\partial V_\theta(s)}{\partial \theta}]$$

- 单次采样进行随机梯度下降

$$\begin{aligned}\theta &\leftarrow \theta - \alpha\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \\ &= \theta + \alpha\left(V^\pi(s) - V_\theta(s)\right)\frac{\partial V_\theta(s)}{\partial \theta}\end{aligned}$$

特征化状态

- 用一个特征向量表示状态

$$x(s)=\begin{bmatrix}x_1(s)\\ \vdots \\ x_k(s)\end{bmatrix}$$

- 以直升机控制问题为例
  - 3D位置
  - 3D速度（位置的变化量）
  - 3D加速度（速度的变化量）

价值函数近似算法

张伟楠 – 上海交通大学

目录

Contents

01

状态值函数近似

线性状态值函数近似

- 用特征的线性组合表示价值函数

$$V_\theta(s) = \theta^{\mathrm{T}} x(s)$$

- 目标函数是参数θ的二次函数

$$J(\theta) = \mathbb{E}_\pi \left[\frac{1}{2} \left(V^\pi(s) - \theta^{\mathrm{T}} x(s) \right)^2 \right]$$

- 因而随机梯度下降能够收敛到全局最优解上

$$\begin{aligned} \theta &\leftarrow \theta - \alpha \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \\ &= \theta + \underbrace{\alpha}_{\text{步长}} \underbrace{\left(V^\pi(s) - V_\theta(s) \right)}_{\text{预测误差}} \underbrace{x(s)}_{\text{特征值}} \end{aligned}$$

蒙特卡洛状态值函数近似

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(V^{\pi}(s) - V_{\theta}(s)\right)x(s)$$

- 我们用$V^{\pi}(s)$表示真实的目标价值函数
- 在“训练数据”上运用监督学习对价值函数进行预测

$$\langle s_1, G_1\rangle, \langle s_2, G_2\rangle, \ldots, \langle s_T, G_T\rangle$$

- 对于每个数据样本$\langle s_t, G_t\rangle$

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(G_t - V_{\theta}(s)\right)x(s_t)$$

- 蒙特卡洛预测至少能收敛到一个局部最优解
  - 在价值函数为线性的情况下可以收敛到全局最优

时序差分状态值函数近似

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\big(V^{\pi}(s) - V_{\theta}(s)\big)x(s)$$

- 时序差分算法的目标$r_{t+1} + \gamma V_{\theta}(s_{t+1})$是真实目标价值$V_{\pi}(s_t)$的有偏采样

- 在“训练数据”上运用监督学习

$$\langle s_1, r_2 + \gamma V_{\theta}(s_2)\rangle, \langle s_2, r_3 + \gamma V_{\theta}(s_3)\rangle, \dots, \langle s_T, r_T\rangle$$

- 对于每个数据样本$\langle s_t, r_{t+1} + \gamma V_{\theta}(s_{t+1})\rangle$

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\big(r_{t+1} + \gamma V_{\theta}(s_{t+1}) - V_{\theta}(s)\big)x(s_t)$$

- 线性情况下时序差分学习（接近）收敛到全局最优解

02

状态-动作值函数近似

状态-动作值函数近似

- 对动作-状态值函数进行近似

$$Q_\theta(s,a) \simeq Q^\pi(s,a)$$

- 最小均方误差

$$J(\theta) = \mathbb{E}_\pi\left[\frac{1}{2}\left(Q^\pi(s,a) - Q_\theta(s,a)\right)^2\right]$$

- 在单个样本上进行随机梯度下降

$$\begin{aligned}\theta &\leftarrow \theta - \alpha\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta} \\ &= \theta + \alpha\big(Q^\pi(s,a) - Q_\theta(s,a)\big)\frac{\partial Q_\theta(s,a)}{\partial\theta}\end{aligned}$$

线性状态-动作值函数近似

- 用特征向量表示状态-动作对

$$x(s,a)=\begin{bmatrix} x_1(s,a) \\ \vdots \\ x_k(s,a) \end{bmatrix}$$

- 线性情况下，参数化后Q函数

$$Q_\theta(s,a)=\theta^{\mathrm{T}}x(s,a)$$

- 利用随机梯度下降更新

$$\begin{aligned}\theta &\leftarrow \theta-\alpha\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta} \\ &=\theta+\alpha\left(Q^\pi(s,a)-\theta^{\mathrm{T}}x(s,a)\right)x(s,a)\end{aligned}$$

时序差分状态-动作值函数近似

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(Q^{\pi}(s,a) - Q_{\theta}(s,a)\right)\frac{\partial Q_{\theta}(s,a)}{\partial \theta}$$

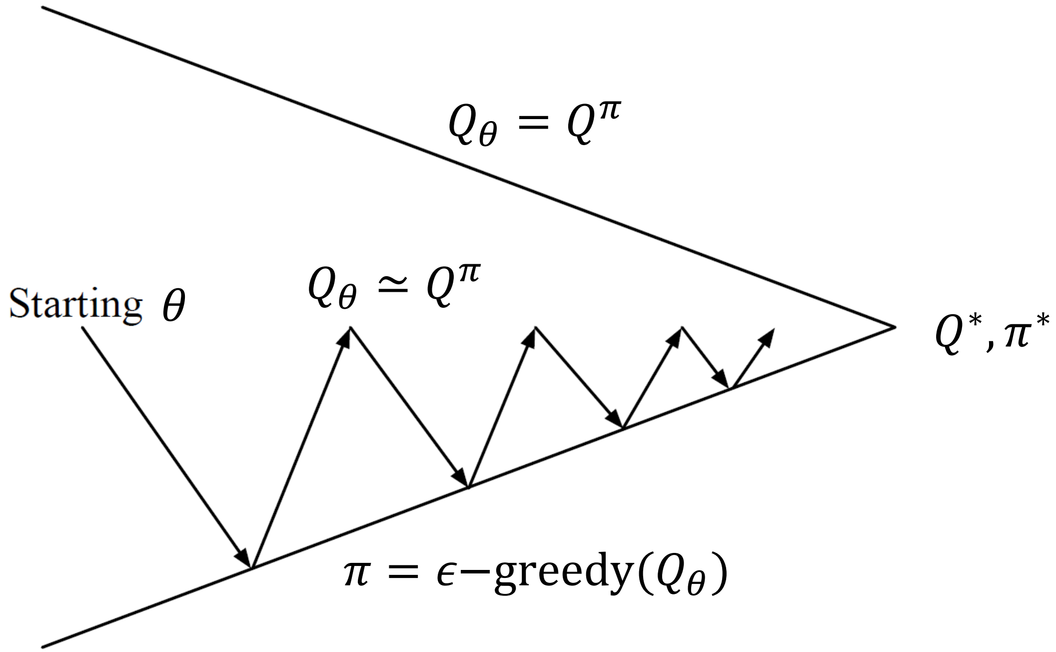
- 对于蒙特卡洛学习，目标是累计奖励G_t

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(G_t - Q_{\theta}(s,a)\right)\frac{\partial Q_{\theta}(s,a)}{\partial \theta}$$

- 对于时序差分学习，目标是$r_{t+1} + \gamma Q_{\theta}(s_{t+1}, a_{t+1})$

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(r_{t+1} + \gamma Q_{\theta}(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_{\theta}(s,a)\right)\frac{\partial Q_{\theta}(s,a)}{\partial \theta}$$

时序差分状态-动作值函数近似



- 策略评估：近似策略评估$Q_\theta \simeq Q^\pi$
- 策略改进：ϵ-贪心策略提升

时序差分学习参数更新过程

- 对于$TD(0)$，时序差分学习的目标是
  - 状态值函数

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(V^{\pi}(s_t) - V_{\theta}(s)\right)\frac{\partial V_{\theta}(s_t)}{\partial \theta}$$

$$= \theta + \alpha\left(r_{t+1} + \gamma V_{\theta}(s_{t+1}) - V_{\theta}(s)\right)\frac{\partial V_{\theta}(s_t)}{\partial \theta}$$

  - 动作-状态值函数

$$\theta \leftarrow \theta + \alpha\left(Q^{\pi}(s,a) - Q_{\theta}(s,a)\right)\frac{\partial Q_{\theta}(s,a)}{\partial \theta}$$

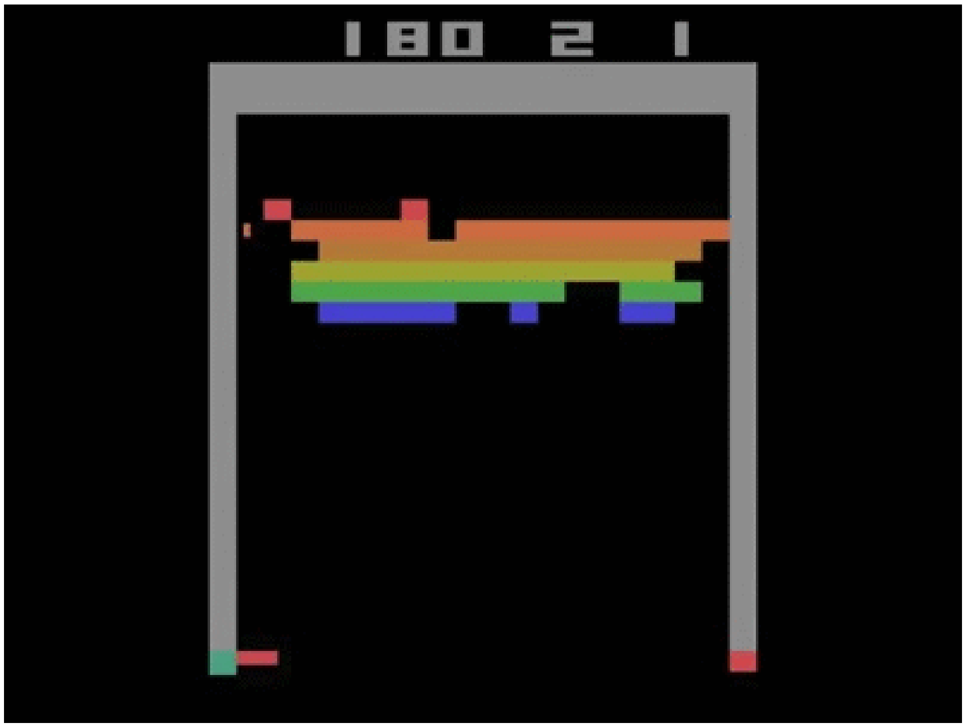
$$= \theta + \alpha\left(r_{t+1} + \gamma Q_{\theta}(s_{t+1},a_{t+1}) - Q_{\theta}(s,a)\right)\frac{\partial Q_{\theta}(s,a)}{\partial \theta}$$

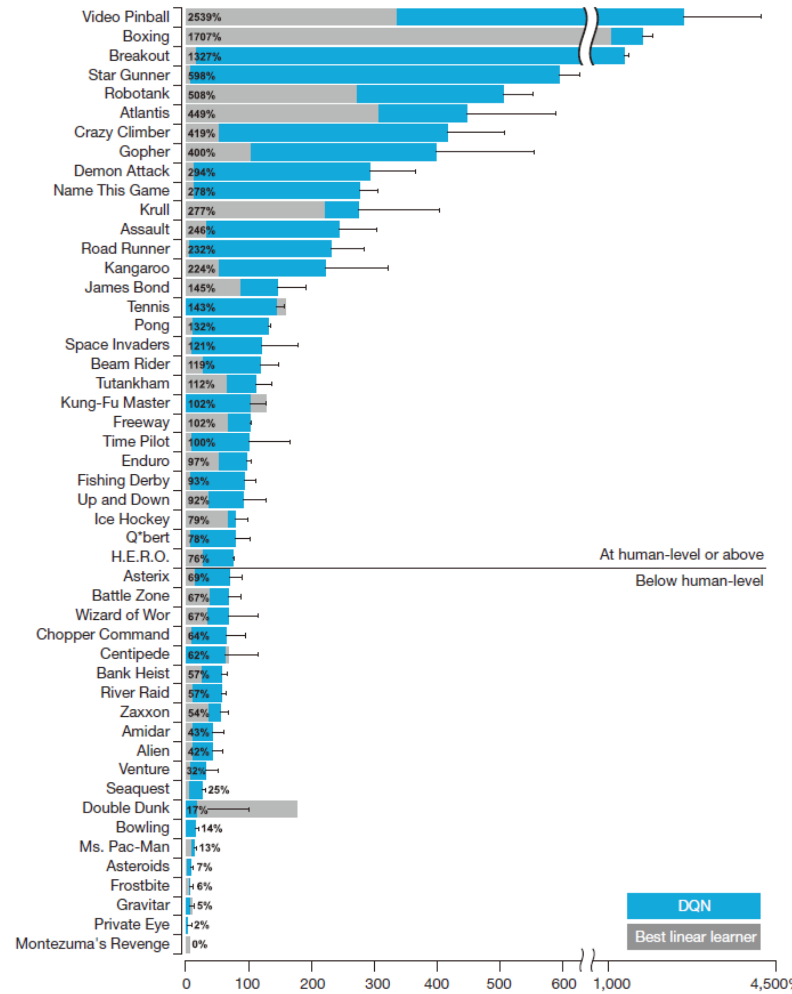
- 虽然θ在时序差分学习的目标中出现，但是我们并不需要计算目标函数的梯度。想想这是为什么？

03

案例分析

案例分析：Deep Q-Network (DQN)

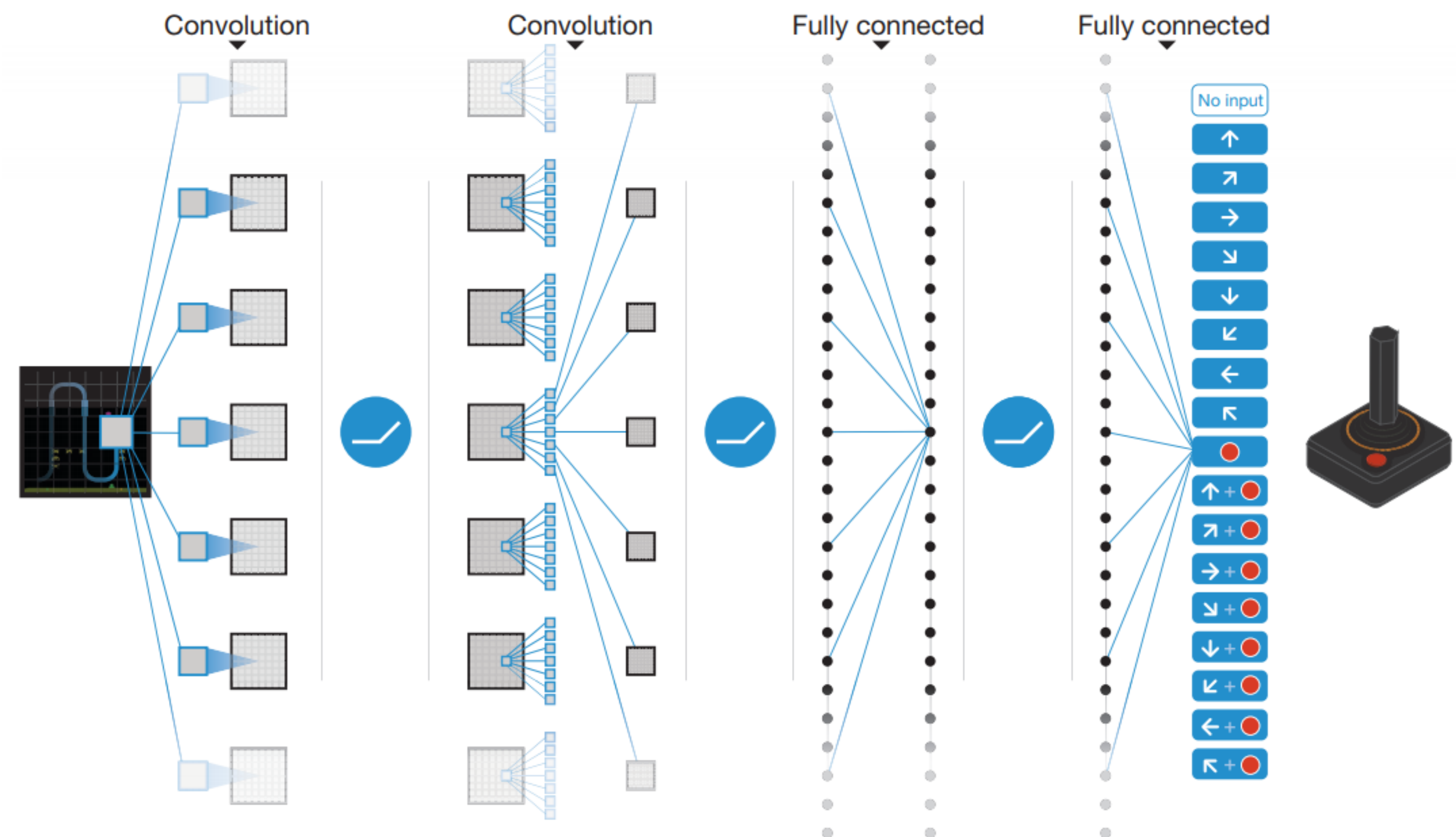




Volodymyr Mnih, Koray Kavukcuoglu, David Silver et al.
Human-level control through deep reinforcement learning. Nature 2015.

案例分析：Deep Q-Network (DQN)

- 使用深度神经网络表示Q函数



Volodymyr Mnih, Koray Kavukcuoglu, David Silver et al.
Human-level control through deep reinforcement learning. Nature 2015.

案例分析：Deep Q-Network (DQN)

- 第i轮迭代中更新的Q-学习损失函数

$$L_i(\theta_i) = \mathbb{E}_{(s,a,r,s')\sim U(D)}\left[\left(\underbrace{r + \gamma \max_{a'} Q(s', a'; \theta_i^-)}_{\text{目标Q值}} - \underbrace{Q(s, a; \theta_i)}_{\text{预测Q值}}\right)^2\right]$$

- θ_i是第i轮迭代中将要更新的网络参数
  - 通过标准的反向传播算法进行更新
- θ_i^-是目标网络参数
  - 仅在θ_i每更新C步后进行更新
- $(s, a, r, s')\sim U(D)$：样本从经验池D中均匀抽样
  - 这样做可以避免在近期经验上过拟合

Volodymyr Mnih, Koray Kavukcuoglu, David Silver et al.
Human-level control through deep reinforcement learning. Nature 2015.

策略梯度

张伟楠 – 上海交通大学

参数化策略

- 我们能够将策略参数化

$$\pi_\theta(a|s)$$

策略可以是确定性的

$$a = \pi_\theta(s)$$

也可以是随机的

$$\pi_\theta(a|s) = P(a|s;\theta)$$

  - θ 是策略的参数
  - 将可见的已知状态泛化到未知的状态上
  - 在本课程中我们主要讨论的是模型无关的强化学习

基于策略的强化学习

优点

- 具有更好的收敛性质
- 在高维度或连续的动作空间中更有效
  - 最重要的因素：基于值函数的方法，通常需要取最大值
- 能够学习出随机策略

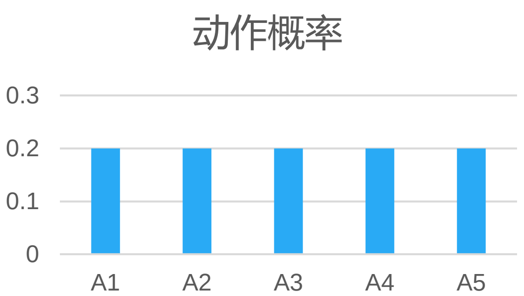
缺点

- 通常会收敛到局部最优而非全局最优
- 评估一个策略通常不够高效并具有较大的方差（variance）

策略梯度

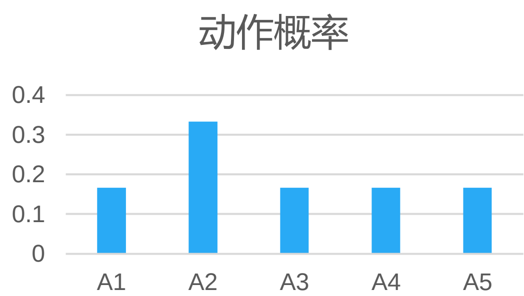
- 对于随机策略$\pi_\theta(a|s) = P(a|s;\theta)$
- 直觉上我们应该
  - 降低带来较低价值/奖励的动作出现的概率
  - 提高带来较高价值/奖励的动作出现的概率
- 一个离散动作空间维度为5的例子

1. 初始化θ



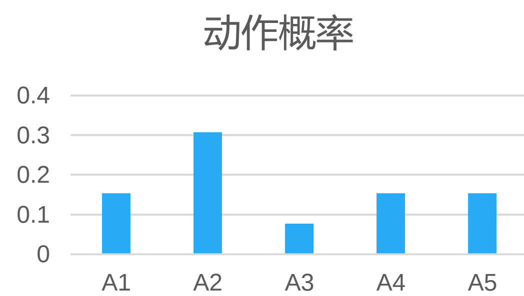
2. 采取动作A2
观察到正的奖励

3. 根据策略梯度更新θ



4. 采取动作A3
观察到负的奖励

5. 根据策略梯度更新θ



单步马尔可夫决策过程中的策略梯度

- 考虑一个简单的单步马尔可夫决策过程
  - 起始状态为$s \sim d(s)$
  - 决策过程在进行一步决策后结束，获得奖励值为r_{sa}
- 策略的价值期望

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[r] = \sum_{s \in S} d(s) \sum_{a \in A} \pi_\theta(a|s) r_{sa}$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{s \in S} d(s) \sum_{a \in A} \frac{\partial \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} r_{sa}$$

似然比 (Likelihood Ratio)

- 似然比利用下列特性

$$\frac{\partial \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} = \pi_\theta(a|s)\frac{1}{\pi_\theta(a|s)}\frac{\partial \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta}$$
$$= \pi_\theta(a|s)\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta}$$

- 所以策略的价值期望可以写成

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{\pi_\theta}[r] = \sum_{s\in S} d(s) \sum_{a\in A} \pi_\theta(a|s) \boxed{r_{sa}}$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{s\in S} d(s) \sum_{a\in A} \frac{\partial \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} r_{sa}$$

$$= \sum_{s\in S} d(s) \sum_{a\in A} \pi_\theta(a|s) \boxed{\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} r_{sa}}$$

$$= \mathbb{E}_{\pi_\theta}\left[\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} r_{sa}\right]$$

这一结果可以通过从d(s)中采样状态s和从πθ中采样动作a来近似估计

策略梯度定理

- 策略梯度定理把似然比的推导过程泛化到多步马尔可夫决策过程
  - 用长期的价值函数 $Q^{\pi_\theta}(s,a)$代替前面的瞬时奖励 r_{sa}
- 策略梯度定理涉及
  - 起始状态目标函数 J_1，平均奖励目标函数 J_{avR}，和平均价值目标函数 J_{avV}
- 定理
  - 对任意可微的策略 $\pi_\theta(a|s)$，任意策略的目标函数 $J = J_1, J_{avR}, J_{avV}$，其策略梯度是

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \mathbb{E}_{\pi_\theta}\left[\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} Q^{\pi_\theta}(s,a)\right]$$

详细证明过程请参考:

1. Rich Sutton’s Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章
2. 动手学强化学习策略梯度的附录 https://hrl.boyuai.com/chapter/2/%E7%AD%96%E7%95%A5%E6%A2%AF%E5%BA%A6%E7%AE%97%E6%B3%95/

蒙特卡洛策略梯度（REINFORCE）

- 利用随机梯度上升更新参数
- 利用策略梯度定理
- 利用累计奖励值G_t作为$Q^{\pi_\theta}(s,a)$的无偏采样

$$\Delta\theta_t = \alpha \frac{\partial \log \pi_\theta(a_t|s_t)}{\partial\theta} G_t$$

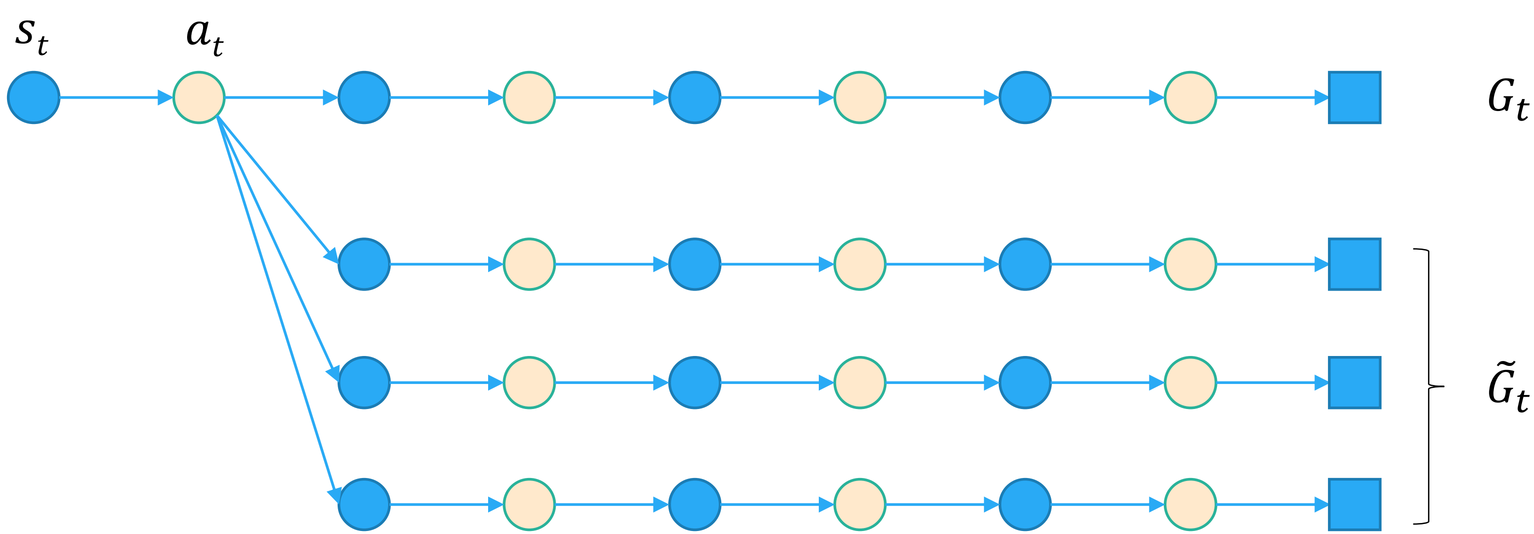
- REINFORCE算法

```
initialize θ arbitrarily
for each episode {s_1, a_1, r_2, ..., s_{T-1}, a_{T-1}, r_T} ~ π_θ do
        for t = 1 to T − 1 do
                θ ← θ + α (∂/∂θ) logπ_θ(a_t|s_t) G_t
        end for
end for
return θ
```

蒙特卡洛策略梯度（REINFORCE)

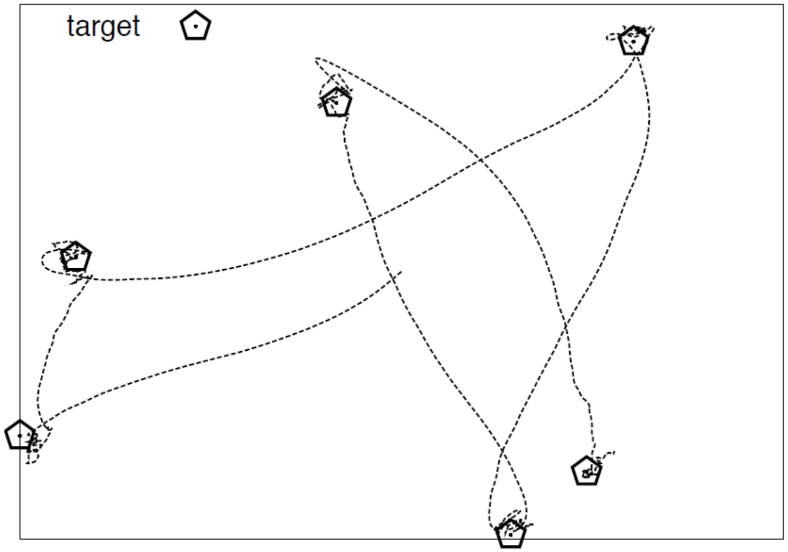
$$\Delta\theta_t = \alpha \frac{\partial \log \pi_\theta(a_t|s_t)}{\partial \theta} G_t$$

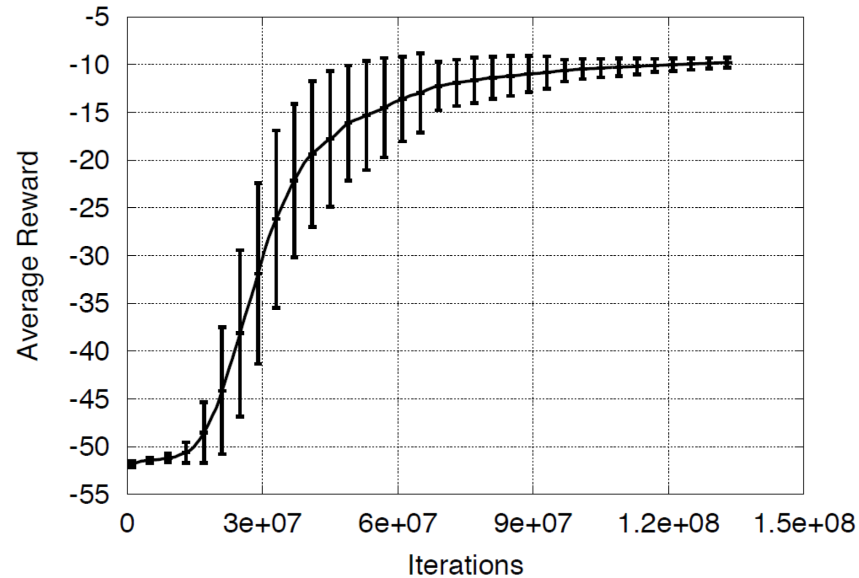
- 可通过多次roll-out的G_t平均值来逼近$Q(s_t, a_t)$



$$\tilde{G}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} G_t^{(i)}$$

Puck World 冰球世界示例





- 连续的动作对冰球施加较小的力
- 冰球接近目标可以得到奖励
- 目标位置每30秒重置一次
- 使用蒙特卡洛策略梯度方法训练策略

Softmax随机策略

- Softmax策略是一种非常常用的随机策略

$$\pi_\theta(a|s) = \frac{e^{f_\theta(s,a)}}{\sum_{a'} e^{f_\theta(s,a')}}$$

  - 式中，$f_\theta(s,a)$是用θ参数化的状态-动作对得分函数，可以预先定义

- 其对数似然的梯度是

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_\theta(s,a)}{\partial \theta} - \frac{1}{\sum_{a'} e^{f_\theta(s,a')}} \sum_{a''} e^{f_\theta(s,a'')} \frac{\partial f_\theta(s,a'')}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial f_\theta(s,a)}{\partial \theta} - \mathbb{E}_{a' \sim \pi_\theta(a'|s)}\left[\frac{\partial f_\theta(s,a')}{\partial \theta}\right]\end{aligned}$$

Softmax随机策略

- Softmax策略是一种非常常用的随机策略

$$\pi_\theta(a|s) = \frac{e^{f_\theta(s,a)}}{\sum_{a'} e^{f_\theta(s,a')}}$$

  - 式中，$f_\theta(s,a)$是用θ参数化的状态-动作对得分函数，可以预先定义

- 举线性得分函数为例，则有

$$f_\theta(s,a) = \theta^{\mathrm{T}} x(s,a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_\theta(s,a)}{\partial \theta} - \mathbb{E}_{a' \sim \pi_\theta(a'|s)}\left[\frac{\partial f_\theta(s,a')}{\partial \theta}\right] \\ &= x(s,a) - \mathbb{E}_{a' \sim \pi_\theta(a'|s)}[x(s,a')]\end{aligned}$$

Actor-Critic

张伟楠 – 上海交通大学

REINFORCE 存在的问题

- 基于片段式数据的任务
  - 通常情况下，任务需要有终止状态，REINFORCE才能直接计算累计折扣奖励
- 低数据利用效率
  - 实际中，REINFORCE需要大量的训练数据
- 高训练方差（最重要的缺陷）
  - 从单个或多个片段中采样到的值函数具有很高的方差

Actor-Critic

- Actor-Critic的思想
  - REINFORCE策略梯度方法：使用蒙特卡洛采样直接估计(s_t, a_t)的值G_t
  - 为什么不建立一个可训练的值函数Q_Φ来完成这个估计过程?
- 演员（Actor）和评论家（Critic）

演员 $\pi_\theta(a|s)$

采取动作使评论家满意的策略

评论家 $Q_\Phi(s,a)$

学会准确估计演员策略所采取动作价值的值函数

Actor-Critic训练

- 评论家Critic: $Q_\Phi(s,a)$
  - 学会准确估计当前演员策略（actor policy）的动作价值

$$Q_\Phi(s,a) \simeq r(s,a) + \gamma \mathbb{E}_{s' \sim p(s'|s,a), a' \sim \pi_\theta(a'|s')}[Q_\Phi(s',a')]$$

- 演员Actor: $\pi_\theta(a|s)$
  - 学会采取使critic满意的动作

$$J(\theta) = \mathbb{E}_{s \sim p, \pi_\theta}[\pi_\theta(a|s) Q_\Phi(s,a)]$$

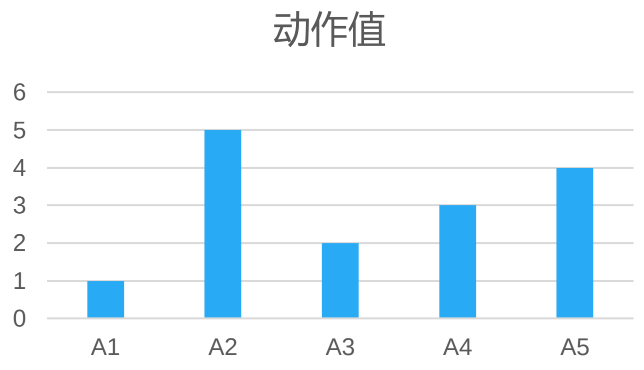
$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \mathbb{E}_{\pi_\theta}\left[\frac{\partial \log \pi_\theta(a|s)}{\partial \theta} Q_\Phi(s,a)\right]$$

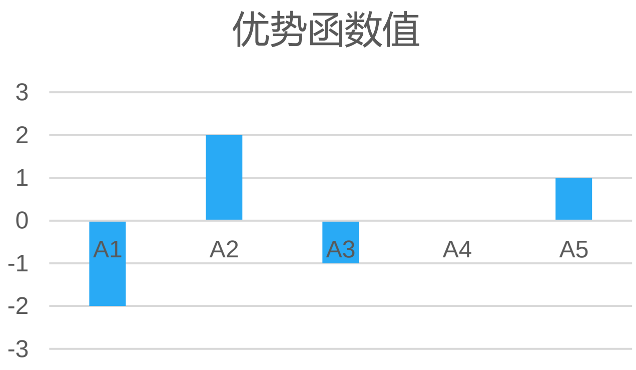
A2C： Advantageous Actor-Critic

- 思想：通过减去一个基线函数来标准化评论家的打分
  - 更多信息指导：降低较差动作概率，提高较优动作概率
  - 进一步降低方差

- 优势函数（Advantage Function）

$$A^{\pi}(s,a) = Q^{\pi}(s,a) - V^{\pi}(s)$$





A2C：Advantageous Actor-Critic

- 状态-动作值和状态值函数

$$
\begin{aligned}
Q^{\pi}(s,a) &= r(s,a) + \gamma \mathbb{E}_{s' \sim p(s'|s,a), a' \sim \pi_{\theta}(a'|s')} [Q_{\Phi}(s',a')] \\
&= r(s,a) + \gamma \mathbb{E}_{s' \sim p(s'|s,a)} [V^{\pi}(s')]
\end{aligned}
$$

- 因此我们只需要拟合状态值函数来拟合优势函数

$$
\begin{aligned}
A^{\pi}(s,a) &= Q^{\pi}(s,a) - V^{\pi}(s) \\
&= r(s,a) + \gamma \mathbb{E}_{s' \sim p(s'|s,a)} [V^{\pi}(s') - V^{\pi}(s)] \\
&\simeq r(s,a) + \gamma \big(V^{\pi}(s') - V^{\pi}(s)\big)
\end{aligned}
$$

采样下一个状态s'

价值和策略的近似逼近方法总结

- 价值和策略的近似逼近方法是强化学习技术从‘玩具’ 走向 ‘现实’的第一步，是深度强化学习的基础设置
- 参数化的价值函数和策略
- 通过链式法则，价值函数的参数可以被直接学习
- 通过likelihood-ratio方法，可以用advantage对策略的参数进行学习
- Actor-critic框架同时学习了价值函数和策略，通过价值函数的Q（或Advantage）估计，以策略梯度的方式更新策略参数

THANK YOU

策略梯度定理：平均奖励原则

- 平均奖励目标函数

$$J(\pi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[r_1 + r_2 + \cdots + r_n|\pi] = \sum_s d^\pi(s) \sum_a \pi(a|s) r(s,a)$$

$$Q^\pi(s,a) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}[r_t - J(\pi)|s_0 = s, a_0 = a, \pi]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^\pi(s)}{\partial \theta} &\overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_a \pi(a|s) Q^\pi(s,a), \quad \forall s \\
&= \sum_a \left[\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta} Q^\pi(s,a) + \pi(a|s) \frac{\partial}{\partial \theta} Q^\pi(s,a)\right] \\
&= \sum_a \left[\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta} Q^\pi(s,a) + \pi(a|s) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r(s,a) - J(\pi) + \sum_{s'} P^a_{ss'} V^\pi(s')\right)\right] \\
&= \sum_a \left[\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta} Q^\pi(s,a) + \pi(a|s) \left(-\frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{s'} P^a_{ss'} V^\pi(s')\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta} = \sum_a \left[\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta} Q^\pi(s,a) + \pi(a|s) \sum_{s'} P^a_{ss'} \frac{\partial V^\pi(s')}{\partial \theta}\right] - \frac{\partial V^\pi(s)}{\partial \theta}$$

推导过程请参考Rich Sutton Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章

策略梯度定理：平均奖励原则

- 目标函数

$$\frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta}=\sum_{a}[\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta}Q^{\pi}(s,a)+\pi(a|s)\sum_{s'}P_{ss'}^{a}\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}]-\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial \theta}$$

$$\sum_{s}d^{\pi}(s)\frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta}=\sum_{s}d^{\pi}(s)\sum_{a}\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta}Q^{\pi}(s,a)+\sum_{s}d^{\pi}(s)\sum_{a}\pi(a|s)\sum_{s'}P_{ss'}^{a}\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}-\sum_{s}d^{\pi}(s)\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial \theta}$$

$$\sum_{s}d^{\pi}(s)\sum_{a}\pi(a|s)\sum_{s'}P_{ss'}^{a}\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}=\sum_{s}\sum_{a}\sum_{s'}d^{\pi}(s)\,\pi(a|s)P_{ss'}^{a}\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}$$

$$=\sum_{s}\sum_{s'}d^{\pi}(s)\left(\sum_{a}\pi(a|s)P_{ss'}^{a}\right)\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}=\sum_{s}\sum_{s'}d^{\pi}(s)\,P_{ss'}\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}$$

$$=\sum_{s'}\left(\sum_{s}d^{\pi}(s)P_{ss'}\right)\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}=\sum_{s'}d^{\pi}(s')\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow\sum_{s}d^{\pi}(s)\frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta}=\sum_{s}d^{\pi}(s)\sum_{a}\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta}Q^{\pi}(s,a)+\sum_{s'}d^{\pi}(s')\frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}-\sum_{s}d^{\pi}(s)\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta}=\sum_{s}d^{\pi}(s)\sum_{a}\frac{\partial \pi(a|s)}{\partial \theta}Q^{\pi}(s,a)$$

推导过程请参考Rich Sutton Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章

策略梯度定理：起始价值原则

- 起始状态价值目标

$$J(\pi) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{t-1} r_t \middle| s_0, \pi\right]$$

$$Q^{\pi}(s,a) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} r_{t+k} \middle| s_t = s, a_t = a, \pi\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{a} \pi(s,a) Q^{\pi}(s,a), \quad \forall s \\
&= \sum_{a} \left[\frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) + \pi(s,a) \frac{\partial}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a)\right] \\
&= \sum_{a} \left[\frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) + \pi(s,a) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r(s,a) + \sum_{s'} \gamma P_{ss'}^{a} V^{\pi}(s')\right)\right] \\
&= \sum_{a} \frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) + \sum_{a} \pi(s,a) \gamma \sum_{s'} P_{ss'}^{a} \frac{\partial V^{\pi}(s')}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

推导过程请参考Rich Sutton Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章

策略梯度定理：起始价值原则

- 起始状态价值目标

$$\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial\theta}=\sum_{a}\frac{\partial\pi(s,a)}{\partial\theta}Q^{\pi}(s,a)+\sum_{a}\pi(s,a)\gamma\sum_{s_1}P^{a}_{ss_1}\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}$$

$$\sum_{a}\frac{\partial\pi(s,a)}{\partial\theta}Q^{\pi}(s,a)=\gamma^{0}\Pr(s\to s,0,\pi)\sum_{a}\frac{\partial\pi(s,a)}{\partial\theta}Q^{\pi}(s,a)$$

$$\sum_{a}\pi(s,a)\gamma\sum_{s_1}P^{a}_{ss_1}\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}=\sum_{s_1}\sum_{a}\pi(s,a)\gamma P^{a}_{ss_1}\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}$$

$$=\sum_{s_1}\gamma P_{ss_1}\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}=\gamma^{1}\sum_{s_1}\Pr(s\to s_1,1,\pi)\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial V^{\pi}(s_1)}{\partial\theta}=\sum_{a}\frac{\partial\pi(s_1,a)}{\partial\theta}Q^{\pi}(s_1,a)+\gamma^{1}\sum_{s_2}\Pr(s_1\to s_2,1,\pi)\frac{\partial V^{\pi}(s_2)}{\partial\theta}$$

推导过程请参考Rich Sutton Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章

策略梯度定理：起始价值原则

- 起始状态价值目标

$$\frac{\partial V^{\pi}(s)}{\partial \theta} = \gamma^0 \Pr(s \to s, 0, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) + \gamma^1 \sum_{s_1} \Pr(s \to s_1, 1, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(s_1,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s_1,a)$$

$$+\gamma^2 \sum_{s_1} \Pr(s \to s_1, 1, \pi) \sum_{s_2} \Pr(s_1 \to s_2, 1, \pi) \frac{\partial V^{\pi}(s_2)}{\partial \theta}$$

$$= \gamma^0 \Pr(s \to s, 0, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) + \gamma^1 \sum_{s_1} \Pr(s \to s_1, 1, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(s_1,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s_1,a)$$

$$+\gamma^2 \sum_{s_2} \Pr(s \to s_2, 2, \pi) \frac{\partial V^{\pi}(s_2)}{\partial \theta}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_x \gamma^k \Pr(s \to x, k, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(x,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(x,a) = \sum_x \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \Pr(s \to x, k, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(x,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(x,a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J(\pi)}{\partial \theta} = \frac{\partial V^{\pi}(s_0)}{\partial \theta} = \sum_s \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \Pr(s_0 \to s, k, \pi) \sum_a \frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a) = \sum_s d^{\pi}(s) \sum_a \frac{\partial \pi(s,a)}{\partial \theta} Q^{\pi}(s,a)$$

推导过程请参考Rich Sutton Reinforcement Learning: An Introduction (2nd Edition)第13章